MATHEMATICAL
RECREATIONS AND ESSAYS

BY

W. W. ROUSE BALL,

FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

SIXTH EDITION.

MACMILLAN AND CO., LIMITED
ST MARTIN'S STREET, LONDON
1914

*First Problem with Pawns**. On a row of seven squares on a chess-board 3 white pawns (or counters), denoted in the diagram by "*a*"s, are placed on the 3 squares at one end, and 3 black pawns (or counters), denoted by "*b*"s, are placed on the 3 squares at the other end—the middle square being left vacant. Each piece can move only in one direction; the "*a*" pieces can move from left to right, and the "*b*" pieces from right to left. If the square next to a piece is unoccupied, it can move on

a	*a*	*a*		*b*	*b*	*b*

to that; or if the square next to it is occupied by a piece of the opposite colour and the square beyond that is unoccupied, then it can, like a queen in draughts, leap over that piece on to the unoccupied square beyond it. The object is to get all the white pawns in the places occupied initially by the black pawns and vice versa.

The solution requires 15 moves. It may be effected by moving first a white pawn, then successively two black pawns, then three white pawns, then three black pawns, then three white pawns, then two black pawns, and then one white pawn. We can express this solution by saying that if we number the

* Lucas, vol. II, part 5, pp. 141—143.

cells (a term used to describe each of the small squares on a chess-board) consecutively, then initially the vacant space occupies the cell 4 and in the successive moves it will occupy the cells 3, 5, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 6, 4, 2, 3, 5, 4. Of these moves, six are simple and nine are leaps.

Similarly if we have n white pawns at one end of a row of $2n+1$ cells, and n black pawns at the other end, they can be interchanged in $n(n+2)$ moves, by moving in succession 1 pawn, 2 pawns, 3 pawns, ... $n-1$ pawns, n pawns, n pawns, n pawns, $n-1$ pawns, ... 2 pawns, and 1 pawn—all the pawns in each group being of the same colour and different from that of the pawns in the group preceding it. Of these moves $2n$ are simple and n^2 are leaps.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

PAR

ÉDOUARD LUCAS.

> Je n'écris pas principalement pour ceux qui sont du tout ignorants, et qui sont si hébétés et tardifs à comprendre les propriétés des nombres.
>
> (BACHET DE MÉZIRIAC.)

DEUXIÈME ÉDITION.

II

Qui perd gagne. — Les Dominos.
Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-Tête.
Les Jeux de Demoiselles.
Le Jeu icosien d'Hamilton.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1896

LE JEU DES GRENOUILLES.

On place sur les cases d'une bande formée d'un nombre impair de carrés un nombre égal de pions blancs et noirs, séparés par une case vide; tous les pions blancs se trouvant à gauche, et les pions noirs à droite. Il s'agit de faire passer les pions blancs à la place des pions noirs, en profitant de la case vide.

On adopte les règles suivantes : Les pions peuvent avancer d'une case, en allant toujours de gauche à droite, pour les pions blancs; et en sens inverse, pour les pions noirs. Un pion peut franchir un pion d'une autre couleur, dans le sens de son mouvement exigé, pour venir se placer sur la case vide immédiatement voisine.

Si l'on suppose d'abord deux pions blancs ○, ○, et deux pions noirs ●, ●, séparés par une case vide que nous désignerons toujours par un point, on opérera d'après le tableau suivant; la

1	○	○	.	●	●	.
2	○	.	○	●	●	1
3	○	●	○	.	●	2
4	○	●	○	●	.	1
5	○	●	.	●	○	2
6	.	●	○	●	○	2
7	●	.	○	●	○	1
8	●	●	○	.	○	2
9	●	●	.	○	○	1

colonne numérique à gauche indique la suite des coups, la colonne numérique à droite distingue, par les chiffres 1 et 2, le

pas ou avance d'une seule case, du *saut* ou avance de deux cases.

Le problème se trouve ainsi résolu en 9 positions; et l'on observe que la colonne de droite est symétrique, c'est-à-dire qu'elle donne les mêmes chiffres en la lisant de bas en haut ou de haut en bas; de plus, le rectangle qui indique les diverses positions est symétrique par rapport au centre.

Si l'on suppose trois pions blancs et trois pions noirs, on échange les deux systèmes, d'après les règles indiquées, conformément au tableau suivant sur lequel on peut encore faire les remarques qui précèdent.

1	○	○	○	.	●	●	●	.
2	○	○	.	○	●	●	●	1
3	○	○	●	○	.	●	●	2
4	○	○	●	○	●	.	●	1
5	○	○	●	.	●	○	●	2
6	○	.	●	○	●	○	●	2
7	.	○	●	○	●	○	●	1
8	●	○	.	○	●	○	●	2
9	●	○	●	○	.	○	●	2
10	●	○	●	○	●	○	.	2
11	●	○	●	○	●	.	○	1
12	●	○	●	.	●	○	○	2
13	●	.	●	○	●	○	○	2
14	●	●	.	○	●	○	○	1
15	●	●	●	○	.	○	○	2
16	●	●	●	.	○	○	○	1

Le nombre des positions est égal à 16, le nombre des pas à 6 et le nombre des sauts à 9. Pour le cas de quatre pions blancs et de

quatre pions noirs, nous donnerons seulement la moitié du tableau des positions, l'autre moitié s'en déduit par symétrie.

1	○	○	○	○	.	●	●	●	●	.
2	○	○	○	.	○	●	●	●	●	1
3	○	○	○	●	○	.	●	●	●	2
4	○	○	○	●	○	●	.	●	●	1
5	○	○	○	●	.	●	○	●	●	2
6	○	○	.	●	○	●	○	●	●	2
7	○	.	○	●	○	●	○	●	●	1
8	○	●	○	.	○	●	○	●	●	2
9	○	●	○	●	○	.	○	●	●	2
10	○	●	○	●	○	●	○	.	●	2
11	○	●	○	●	○	●	○	●	.	1
12	○	●	○	●	○	●	.	●	○	2
13	○	●	○	●	.	●	○	○	○	2

Le nombre des positions est 25; le nombre des pas est égal à 8 et le nombre des sauts à 16. En général, le problème est toujours possible, et si l'on suppose p pions blancs et p pions noirs,

le nombre total des positions est $(p+1)^2$;

le nombre des pas est $2p$;

le nombre des sauts est p^2.

En ajoutant le nombre des pas au double du nombre des sauts on trouve $2p(p+1)$; c'est ce que l'on doit obtenir si l'on remarque que, pour occuper la case assignée, chaque pion doit avancer de $p+1$ cases, et par suite les $2p$ pions doivent exécuter $2p(p+1)$ déplacements d'une case.